



$\omega$	pulsation .....	rad·s <sup>-1</sup>
$\Psi$	grandeur quelconque	
$\Psi_a$	composante alternative	
$\Psi_0$	constante	
$\zeta$	fréquence spatiale axiale .....	m <sup>-1</sup>

*Indices*

cont	continue
$m, p$	indices de sommation

*Exposants*

-	transformée intégrale
=	double transformée intégrale

**1. INTRODUCTION**

Une tendance forte actuelle des techniques photothermiques consiste à les mettre en œuvre à l'échelle microscopique. Pour atteindre cet objectif, ces techniques doivent être implantées dans divers microscopes : optique, électronique, à effet tunnel, à force atomique... Quelle que soit la technique de détection retenue, les températures atteintes par l'échantillon sous excitation périodique doivent être calculées, en vue de l'interprétation des images obtenues, puis de l'identification de paramètres physiques à partir des signaux photothermiques ou thermoélastiques.

Les résultats obtenus par plusieurs modélisations thermocinétiques sont présentés. Ces différentes modélisations sont entreprises en utilisant largement des transformées intégrales, fonctions de Green ou réponses harmoniques, avec une attention particulière portée aux régimes thermiques observés avec une excitation optique de type laser et de dimensions micrométriques.

Différents régimes thermiques sont mis en évidence en fonction du rapport entre la longueur de diffusion thermique et les dimensions caractéristiques du faisceau exciteur et de l'échantillon. Ces régimes apportent des opportunités de réduction de modèles en vue de l'identification paramétrique.

Cet article est avant tout un travail didactique et de synthèse, dont le principal objectif consiste à faciliter l'interprétation des transferts de chaleur rencontrés dans les méthodes photothermiques en fonction des conditions expérimentales.

**2. ONDE THERMIQUE OU DIFFUSION HARMONIQUE ?**

Les perturbations sinusoïdales de température induites par des sources ou des conditions limites périodiques, telles que celles intervenant dans les techniques

photothermiques, sont couramment baptisées «ondes thermiques» ou, en anglais, «thermal waves». Le plus souvent, cette appellation est plus particulièrement appliquée à la réponse harmonique unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes, dont la forme mathématique s'apparente à celle d'une onde plane en optique.

Strictement parlant [1], une «onde» est le mode de propagation d'une grandeur  $\Psi$  dont les variations temporelles et spatiales sont liées par une équation aux dérivées partielles, dite «équation d'onde» où apparaît explicitement la vitesse de propagation  $v$  :

$$v^2 \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{1}$$

Par ailleurs, une équation aux dérivées partielles est dite «équation de diffusion» quand elle est, comme l'équation de la chaleur, de la forme :

$$a \Delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{2}$$

En régime sinusoïdal, on postule que  $\Psi$  prend la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_a(x, y, z) \exp(j\omega t) \tag{3}$$

À partir de l'équation d'onde, il vient dans ce cas que l'amplitude complexe  $\Psi_a$  est solution de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \Psi_a + \frac{\omega^2}{v^2} \Psi_a = 0 \tag{4}$$

L'équation de diffusion aboutit également dans le cas harmonique à une équation de Helmholtz :

$$\Delta \Psi_a - \frac{j\omega}{a} \Psi_a = 0 \tag{5}$$

d'où une certaine dégénérescence formelle des deux phénomènes en régime harmonique. Notons tout de même que le coefficient de l'équation de Helmholtz, réel dans un cas, imaginaire dans l'autre, avec une dépendance fréquentielle différente, a gardé la mémoire de son origine.

L'analogie est encore plus nette en géométrie unidimensionnelle cartésienne, où la solution de l'équation de diffusion s'écrit en milieu semi-infini :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_0 \exp(-x/\mu) \exp[(j(\omega t - x/\mu))] \\ &= \Psi_0 \exp(-x/\mu) \exp[j 2\pi (ft - x/2\pi\mu)] \end{aligned} \tag{6}$$

avec  $\mu = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \sqrt{\frac{a}{\pi f}}$ , grandeur couramment appelée «longueur de diffusion thermique».

Cette expression mathématique est certes identique à celle d'une onde plane amortie. La longueur  $2\pi\mu$  serait ainsi analogue à une longueur d'onde, qu'on pourrait relier à une vitesse de phase  $\omega\mu = (2a\omega)^{1/2}$ , mais certainement pas à une «vitesse de propagation de la chaleur».



La spécificité principale des solutions de l'équation de diffusion en régime harmonique est que le phénomène ne peut se faire sans atténuation, le même paramètre  $\mu$  gouvernant l'amplitude et la phase, en fonction de la fréquence et de la diffusivité du milieu. À la longueur  $2\pi\mu$ , la perturbation thermique sinusoïdale est pratiquement éteinte en géométrie unidimensionnelle. Elle est encore plus fortement atténuée en géométrie tridimensionnelle, comme nous allons le voir.

Par-delà les similitudes formelles, le phénomène physique de diffusion de la chaleur en régime sinusoïdal ne nous paraît pas pertinemment réductible à un phénomène de propagation d'onde. Le transfert conductif résulte d'un processus collectif irréversible, correctement décrit pour l'essentiel par une équation de diffusion dont la solution ne devrait pas être qualifiée d'onde. Nous n'avons affaire en photothermique qu'à des fluctuations périodiques, nécessairement forcées, de la température.

Ne vaudrait-il pas mieux éviter l'expression «onde thermique» qui n'apporte guère qu'une commodité de langage, mais qui peut troubler l'appréhension du phénomène physique? Nous préférons, pour notre part, qualifier ce phénomène de «diffusion harmonique».

### 3. TRANSFORMÉES INTÉGRALES

Les transformées intégrales, qui sont des techniques mathématiques puissantes, applicables à un vaste champ de la physique (optique, thermique, mécanique...) sont de plus en plus utilisées. Concernant le domaine de la photothermique, partons de l'équation de diffusion de la chaleur en régime sinusoïdal établi et en géométrie bidimensionnelle axisymétrique :

$$\frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial z^2} - \frac{j\omega}{a} T(r, z) = -\frac{q(r, z)}{k} \quad (7)$$

Appliquons à cette équation une double transformée intégrale, laquelle comprend ici une transformée de type Hankel selon la coordonnée radiale, puis une transformée de type Fourier selon la coordonnée axiale. La forme précise des transformées dépend des conditions aux limites spatiales du problème, puisque les fonctions propres  $R(\delta_m, r)$  et  $Z(\zeta_p, z)$ , constituant les noyaux des transformations, doivent vérifier la partie homogène de ces conditions [2].

Avec des conditions limites de deuxième et troisième espèces, l'équation de diffusion de la chaleur devient :

$$-\sigma_m^2 \bar{\bar{T}}(\delta_m, \zeta_p) - \zeta_p^2 \bar{\bar{T}}(\delta_m, \zeta_p) = -\frac{\bar{\bar{q}}(\delta_m, \zeta_p)}{k} \quad (8)$$

avec  $\sigma_m^2 = \delta_m^2 + \frac{j\omega}{a}$ .

L'opération de transformation consiste à multiplier chaque terme de l'équation (7) par les fonctions propres, puis à intégrer sur le volume du matériau. Par exemple, pour la transformée intégrale de la source, nous obtenons :

$$\bar{\bar{q}}(\delta_m, \zeta_p) = \int_{z'=0}^1 \int_{r'=0}^b R(\delta_m, r') Z(\zeta_p, z') q(r', z') r' dr' dz' \quad (9)$$

La solution de l'équation (8) devient alors évidente dans l'espace des transformées :

$$\bar{\bar{T}}(\delta_m, \zeta_p) = \frac{\bar{\bar{q}}(\delta_m, \zeta_p)}{k(\sigma_m^2 + \zeta_p^2)} \quad (10)$$

Le retour à la température s'effectue par application de la formule de double inversion, qui correspond à une double sommation infinie dans le cas général :

$$T(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R(\delta_m, r) Z(\zeta_p, z)}{N(\delta_m) N(\zeta_p)} \frac{\bar{\bar{q}}(\delta_m, \zeta_p)}{k \left( \delta_m^2 + \zeta_p^2 + \frac{j\omega}{a} \right)} \quad (11)$$

$N(\delta_m)$  et  $N(\zeta_p)$  sont les normes respectives des fonctions propres  $R(\delta_m, r)$  et  $Z(\zeta_p, z)$ . Les fonctions propres, leurs valeurs propres et leurs normes sont disponibles dans la littérature pour un milieu homogène et les conditions aux limites usuelles [2]. La solution par les transformées intégrales est alors calculable, quelle que soit la forme de la source, mais la technique s'avère particulièrement intéressante dans le cas où les transformées de la source sont intégrables analytiquement.

Dans le cas particulier d'un milieu semi-infini avec flux nul en surface, les transformées sont alors des transformées classiques de Hankel et de Fourier en cosinus, où les fréquences spatiales  $\delta$  et  $\zeta$  forment des spectres continus :

$$\bar{\bar{q}}(\delta, \zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J_0(\delta r') \cos(\zeta z') q(r', z') r' dr' dz' \quad (12)$$

et la formule d'inversion devient une intégrale double :

$$T(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J_0(\delta r) \cos(\zeta z) \bar{\bar{T}}(\delta, \zeta) \delta d\delta d\zeta \quad (13)$$

### 4. RÉPONSES HARMONIQUES

#### 4.1. Fonctions de Green et réponses harmoniques

L'utilisation des fonctions de Green constitue une autre méthode intégrale utilisable pour la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur. La fonction de Green est la réponse percussionnelle du système, à savoir que c'est la réponse à des distributions de Dirac sur les

coordonnées d'espace, mais également sur le temps. Elle satisfait le système (14) associé à des conditions aux limites homogènes [2] :

$$\begin{cases} \Delta G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') - \frac{1}{a} \frac{\partial G(\vec{r}, t | \vec{r}', t')}{\partial t} \\ \quad = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')}{k} \\ k \frac{\partial G(\vec{r}, t | \vec{r}', t')}{\partial n} + h G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = 0 \end{cases} \quad (14)$$

L'expression de la fonction de Green dépend de la géométrie du système et de ses conditions aux limites. Physiquement, la fonction de Green représente la température au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  induite par la dissipation d'une source ponctuelle instantanée de 1 J au point  $\vec{r}'$  à l'instant  $t'$  ( $t' < t$ ). Par définition, pour tout instant  $t < t'$ , la fonction de Green est nulle.

Pour un système ayant des conditions aux limites homogènes et un champ initial uniforme, la température s'exprime de manière simple à l'aide de la fonction de Green [2] :

$$T(\vec{r}, t) = \frac{a}{k} \int_0^t dt' \iiint_V G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') q(\vec{r}', t') dV' \quad (15)$$

Comme la source de chaleur  $q(\vec{r}, t)$  est modulée sinusoïdalement, elle peut s'écrire :

$$q(\vec{r}, t) = q(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (16)$$

L'équation de diffusion de la chaleur se réduit à :

$$\Delta T(\vec{r}) - \frac{j\omega}{a} T(\vec{r}) = -\frac{q(\vec{r})}{k} \quad (17)$$

où  $T(\vec{r})$  représente la composante alternative de la température (grandeur complexe). En application du principe de superposition, la température  $T(\vec{r}, t)$  en régime sinusoïdal établi peut se mettre sous la forme :

$$T(\vec{r}, t) = T_{\text{cont}}(\vec{r}) + T(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (18)$$

L'expression (15) s'écrit avec une source de chaleur sinusoïdale :

$$T(\vec{r}, t) = \frac{a}{k} \int_0^t dt' \iiint_V G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') q(\vec{r}') e^{j\omega t'} dV' \quad (19)$$

soit encore :

$$T(\vec{r}, t) = \frac{a}{k} \iiint_V q(\vec{r}') \int_0^t G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') e^{j\omega t'} dt' dV' \quad (20)$$

Par ailleurs, les deux variables temporelles  $t$  et  $t'$  dans les expressions des fonctions de Green interviennent uniquement sous la forme de leur différence :  $\tau = t - t'$ . La fonction de Green est donc notée :  $G(\vec{r}, t | \vec{r}', t') = G(\vec{r} | \vec{r}', \tau)$ . Avec ce changement de variable, l'expression (20) devient :

$$T(\vec{r}, t) = \frac{a}{k} \iiint_V q(\vec{r}') \int_0^t G(\vec{r} | \vec{r}', \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dV' e^{j\omega t} \quad (21)$$

Cette relation permet le calcul du régime transitoire. Si le temps  $t$  tend vers l'infini, nous avons alors l'expression de la composante alternative de la température :

$$T(\vec{r}) = \frac{a}{k} \iiint_V q(\vec{r}') \int_0^\infty G(\vec{r} | \vec{r}', \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dV' \quad (22)$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme suivante, à l'aide de la réponse ponctuelle harmonique  $H(\vec{r} | \vec{r}')$  :

$$T(\vec{r}) = \iiint_V H(\vec{r} | \vec{r}') q(\vec{r}') dV' \quad (23)$$

La réponse ponctuelle harmonique  $H(\vec{r} | \vec{r}')$  a alors pour expression [3] :

$$H(\vec{r} | \vec{r}') = \frac{a}{k} \int_0^\infty G(\vec{r} | \vec{r}', \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (24)$$

La réponse harmonique ainsi définie est homogène à une résistance thermique ( $\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ ). Dans l'expression (23), le terme  $q(\vec{r}')$  traduit les propriétés de la source de chaleur et le terme  $H(\vec{r} | \vec{r}')$  tient compte des propriétés thermophysiques et de la géométrie du matériau étudié.  $H(\vec{r} | \vec{r}')$  représente, au facteur  $a/k$  près, la fonction de transfert du problème. Dans de nombreux cas, les fonctions  $G$  et  $H$  sont calculables et utilisables ensuite pour déterminer les champs de température induits par des sources de répartitions spatiales quelconques.

## 4.2. Méthode « mixte » de résolution

En géométrie bidimensionnelle axisymétrique, la fonction  $H(\vec{r} | \vec{r}')$ , soit ici  $H(r, z | r', z')$ , correspondant à la réponse harmonique à une spire de chaleur de rayon  $r'$  située à une cote  $z'$ , doit vérifier l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{j\omega}{a} H &= -\frac{\delta(r - r') \delta(z - z')}{2\pi r k} \\ &= -\frac{\delta(r^2 - r'^2) \delta(z - z')}{\pi k} \end{aligned} \quad (25)$$

Le champ de température s'exprime alors par :

$$T(r, z) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\infty H(r, z | r', z') q(r', z') r' dr' dz' \quad (26)$$

À notre connaissance, la transformée de Fourier de la fonction de Green correspondant à une spire de chaleur n'est pas intégrable analytiquement.

Une alternative élégante consiste à combiner une transformée intégrale avec une réponse harmonique unidimensionnelle notée  $H(\delta, z|z')$  [3]. Pour un milieu semi-infini, la transformée de Hankel d'ordre zéro peut être utilisée. Avec une condition à la limite considérant un flux nul en surface, la réponse harmonique à un plan de chaleur situé à la cote  $z'$  a pour expression [4] :

$$H(\delta, z|z') = \frac{1}{2k\sigma} \left( e^{-\sigma|z-z'|} + e^{-\sigma(z+z')} \right)$$

où 
$$\sigma^2 = \delta^2 + \frac{j\omega}{a} \quad (27)$$

Cette fonction peut alors être utilisée pour calculer la transformée de Hankel de la température :

$$\bar{T}(\delta, z) = \int_0^\infty H(\delta, z|z') \bar{q}(\delta, z') dz' \quad (28)$$

Par transformée de Hankel inverse, la température s'exprime sous la forme :

$$T(r, z) = \int_0^\infty \int_0^\infty H(\delta, z|z') \bar{q}(\delta, z') J_0(\delta r) \delta d\delta dz' \quad (29)$$

Pour un milieu de dimension latérale finie, la formule d'inversion de la transformée de Hankel est une somme discrète. Avec une source optique de type laser, l'intégration selon la variable  $z'$  est calculable analytiquement et la solution est alors identique à celle obtenue par la méthode de séparation des variables [5]. Finalement, le champ de température est calculé au prix d'une seule intégration numérique sur la fréquence spatiale de Hankel  $\delta$ .

## 5. RÉPONSES HARMONIQUES ET RÉDUCTION DE MODÈLES

Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, la solution de l'équation de diffusion de la chaleur en régime harmonique peut se calculer sous la forme :

$$T(\vec{r}) = \iiint_V H(\vec{r}|\vec{r}') q(\vec{r}') dV' \quad (30)$$

À partir de cette expression, différents régimes de transfert de chaleur peuvent être mis en évidence. Pour une source de chaleur  $q(\vec{r}')$  assimilable à une distribution de Dirac, les régimes sphérique, cylindrique et plan sont observables. L'intégration volumique dans

l'expression (30) est alors aisée à réaliser dans le cas où  $\eta P$  correspond à la puissance absorbée :

$$T(\vec{r}) = \iiint_V H(\vec{r}|\vec{r}') \frac{\eta P}{2} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) dV' = \frac{\eta P}{2} H(\vec{r}|\vec{r}_0) \quad (31)$$

### 5.1. Régime sphérique (dimensions de l'échantillon $\gg \mu \gg$ dimensions de la source)

La réponse ponctuelle harmonique d'un milieu infini, en géométrie tridimensionnelle cartésienne, se détermine à partir de la fonction de Green et à l'aide de transformées de Laplace tabulées [2, 6] :

$$H(\vec{r}|\vec{r}') = \frac{1}{4\pi k} \frac{e^{-\sigma_\mu |\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{où } \sigma_\mu = \frac{1+j}{\mu} \quad (32)$$

Dans un système de coordonnées sphériques dont l'origine du repère est sur le point source, cette réponse devient unidimensionnelle. Pour un milieu semi-infini, grâce à la méthode des images, il suffit d'ajouter à la réponse du milieu infini son image par rapport à la surface. Lorsque le point source est en surface, cela revient à doubler la réponse, d'où l'expression de la température en régime sphérique :

$$T(r) = \frac{\eta P}{2} \frac{2}{4\pi k} \frac{e^{-\sigma_\mu r}}{r} = \frac{\eta P}{4\pi k} \frac{e^{-\sigma_\mu r}}{r} \quad (33)$$

Le régime sphérique est nettement observable si la longueur de diffusion thermique peut devenir à la fois très inférieure aux dimensions de l'échantillon et très supérieure à celles de la source de chaleur. Ces conditions sont souvent satisfaites avec une excitation de dimensions micrométriques et des fréquences de modulation moyennes.

### 5.2. Régime cylindrique (profondeur moyenne de pénétration $\gg \mu \gg$ rayon d'excitation)

La réponse linéique harmonique d'un milieu infini, en géométrie bidimensionnelle cartésienne, se calcule également par transformation de Laplace de la fonction de Green correspondante, pour donner :

$$H(\vec{r}|\vec{r}') = \frac{1}{2\pi k} K_0 \left( \sigma_\mu |\vec{r} - \vec{r}'| \right) \quad (34)$$

où  $K_0$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre zéro.

Dans un système de coordonnées cylindriques dont l'axe  $Oz$  coïncide avec le fil source, cette réponse devient unidimensionnelle. Si la puissance absorbée  $\eta P/2$  est dissipée sur une longueur  $l$  de ce «fil harmonique» de

chaleur, nous obtenons l'expression de la température en régime cylindrique :

$$T(r) = \frac{\eta P}{2l} \frac{1}{2\pi k} K_0(\sigma_\mu r) = \frac{\eta P}{4\pi k l} K_0(\sigma_\mu r) \quad (35)$$

Ce régime cylindrique ne peut être observé que si la source de chaleur est nettement plus étendue en profondeur qu'en largeur.

### 5.3. Régime plan (rayon d'excitation $\gg \mu \gg$ profondeur moyenne de pénétration)

La réponse surfacique harmonique correspondante a pour expression :

$$H(\vec{r}|\vec{r}') = \frac{1}{2k\sigma_\mu} e^{-\sigma_\mu|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (36)$$

Cette réponse est homogène à une résistance thermique de contact ( $K \cdot m^2 \cdot W^{-1}$ ). Pour un milieu semi-infini avec flux nul en  $z = 0$ , la réponse plane harmonique obtenue est identique à la relation (36), où  $\delta$  est pris égal à zéro (voir relation (27)). Pour retrouver la température du milieu en régime plan, il suffit de multiplier la réponse harmonique par le flux surfacique, d'où  $T(z)$  :

$$T(z) = \frac{\eta P}{2\pi r_0^2 k \sigma_\mu} e^{-\sigma_\mu z} \quad (37)$$

Le régime plan est observé si la source de chaleur est plus large que profonde et si la longueur de diffusion thermique est à la fois très inférieure au rayon d'excitation et très supérieure à la profondeur moyenne de pénétration de la source. Ce régime se caractérise typiquement par une phase de la composante alternative de la température égale à  $-45^\circ$  en surface ( $z = 0$ ).

### 5.4. Régime isotherme (nombre de Biot $\ll 1$ et $\mu \gg$ dimensions de l'échantillon)

Les régimes de transfert de chaleur isotherme et adiabatique correspondent aux deux cas limites où la source et la réponse harmonique du milieu se trouvent décorrélées spatialement, l'une ou l'autre de ces fonctions pouvant être considérée comme constante sur le domaine d'intégration spatiale.

Le régime isotherme se rencontre lorsque le milieu est thermiquement mince (il se comporte comme un bloc isotherme pour la composante continue) et lorsque la longueur de diffusion est suffisamment grande pour que l'on puisse considérer la réponse harmonique comme constante dans tout le volume de l'échantillon (avec la même phase et la même amplitude en tout point).

Le premier principe de la thermodynamique est utilisé pour déterminer simplement la température du milieu dans ces conditions. Nous avons :

$$\frac{k}{a} V j\omega T = -h S T + \iiint_V q(\vec{r}') dV = -h S T + \frac{\eta P}{2} \quad (38)$$

$$\text{soit :} \quad T = \frac{\eta P/2}{h S + j\omega \frac{k}{a} V} \quad (39)$$

La température s'exprime donc par

$$\begin{aligned} T &= \iiint_V H(\vec{r}|\vec{r}') q(\vec{r}') dV' = H \iiint_V q(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{\eta P/2}{h S + j\omega \frac{k}{a} V} \quad (40) \end{aligned}$$

Ce régime se manifeste nécessairement aux basses fréquences de modulation, pour lesquelles la longueur de diffusion devient très grande. La perturbation sinusoïdale est confinée dans l'échantillon, son extension étant limitée par les interfaces. C'est aussi logiquement le régime le plus sensible à la valeur du coefficient d'échange  $h$ .

### 5.5. Régime adiabatique ( $\mu \ll$ dimensions de la source)

Le régime adiabatique correspond au cas où la source de chaleur peut être considérée comme constante sur un volume dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur de diffusion. Ce volume n'échange alors plus d'énergie avec ses voisins, d'où l'adiabaticité du phénomène. Le laplacien dans l'équation de diffusion de la chaleur peut alors être négligé :

$$\Delta T(\vec{r}) - \frac{j\omega}{a} T(\vec{r}) \approx -\frac{j\omega}{a} T(\vec{r}) = -\frac{q(\vec{r}')}{k} \quad (41)$$

La température se détermine alors par :

$$\begin{aligned} T(\vec{r}) &= \iiint_V H(\vec{r}|\vec{r}') q(\vec{r}') dV' \\ &= q(\vec{r}') \iiint_V H(\vec{r}|\vec{r}') dV' = q(\vec{r}') \frac{a}{j\omega k} \quad (42) \end{aligned}$$

Pour des matériaux diélectriques et des sources de chaleur de relativement grandes dimensions, ce régime peut faire sentir son influence dès quelques Hertz. En revanche, pour les métaux et pour des excitations à l'échelle micrométrique, il ne peut apparaître qu'à de très hautes fréquences.

## 6. APPLICATION À UNE SOURCE OPTIQUE DE TYPE LASER

### 6.1. Profil de source

La source optique correspond ici à une excitation de type laser fonctionnant en mode TEM 00. Le faisceau exciteur a une répartition énergétique de forme gaussienne suivant la dimension radiale de rayon à  $1/e$  égal à  $r_0$ . L'atténuation du faisceau en profondeur suit une loi exponentielle avec un coefficient d'absorption  $\beta$ .

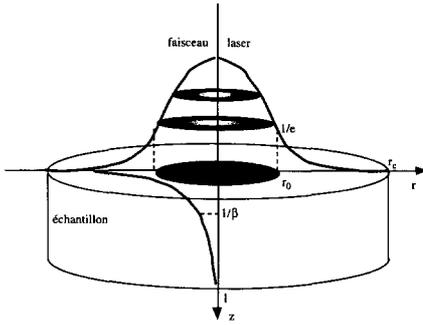


Figure 1. Excitation optique.  
Figure 1. Optical excitation.

La source volumique de chaleur s'écrit :

$$q(r, z, t) = \frac{\eta P \beta}{\pi r_0^2} e^{-\beta z} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \frac{e^{j\omega t}}{2} \quad (43)$$

L'échantillon retenu ici est un échantillon d'aluminium dont les caractéristiques sont les suivantes :  $\beta = 1,25 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ ,  $k = 204 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 2707 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $C_p = 896 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , d'où une diffusivité thermique de  $8,41 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Toutes les courbes présentées dans cet article sont relatives à cet échantillon d'aluminium, sauf mention contraire.

### 6.2. Transition régime sphérique - régime plan

La figure 2 présente l'importance au centre de l'excitation ( $r = 0 ; z = 0$ ) de la taille de sonde dans la réponse thermique d'un échantillon d'aluminium. Les valeurs de rayon retenues sont : 1 ; 10 et 50  $\mu\text{m}$ , dimensions physiquement réalisables avec un faisceau laser convenablement focalisé. La puissance absorbée  $\eta P$  est prise égale à 1 mW, ce qui la rend représentative d'un laser de faible puissance. La courbe en amplitude fait apparaître le rapport entre l'amplitude de la composante alternative et la composante continue de la température.

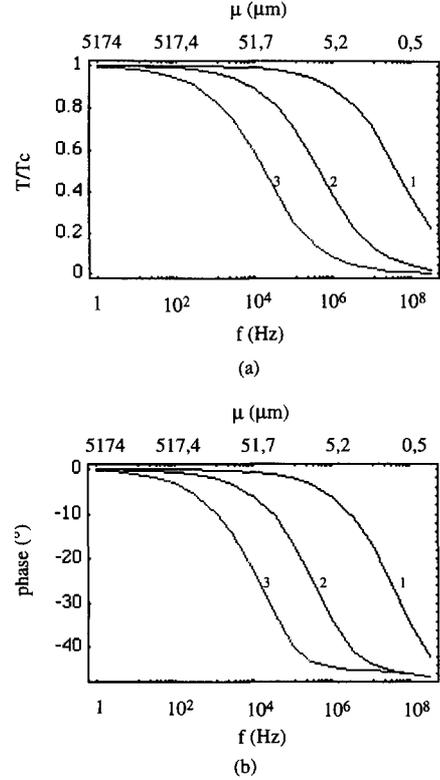


Figure 2. Température au centre ( $r = 0 ; z = 0$ ), aluminium. 1 :  $r_0 = 1 \mu\text{m}$  ; 2 :  $r_0 = 10 \mu\text{m}$  ; 3 :  $r_0 = 50 \mu\text{m}$ .  
Figure 2. Temperature at the centre ( $r = 0 ; z = 0$ ), aluminium. 1 :  $r_0 = 1 \mu\text{m}$  ; 2 :  $r_0 = 10 \mu\text{m}$  ; 3 :  $r_0 = 50 \mu\text{m}$ .

L'axe inférieur est gradué suivant la fréquence de modulation, alors que l'axe supérieur donne la valeur correspondante de la longueur de diffusion thermique. Cette figure 2 permet d'observer le passage du régime sphérique au régime plan du transfert de chaleur. Le régime plan correspond à l'approximation unidimensionnelle, à savoir une phase en surface de  $-45^\circ$ . Ce régime plan se rencontre lorsque la longueur de diffusion thermique devient nettement inférieure au rayon d'excitation. Donc, plus le rayon d'excitation est faible, plus la transition régime sphérique - régime plan se produit pour des fréquences de modulation élevées.

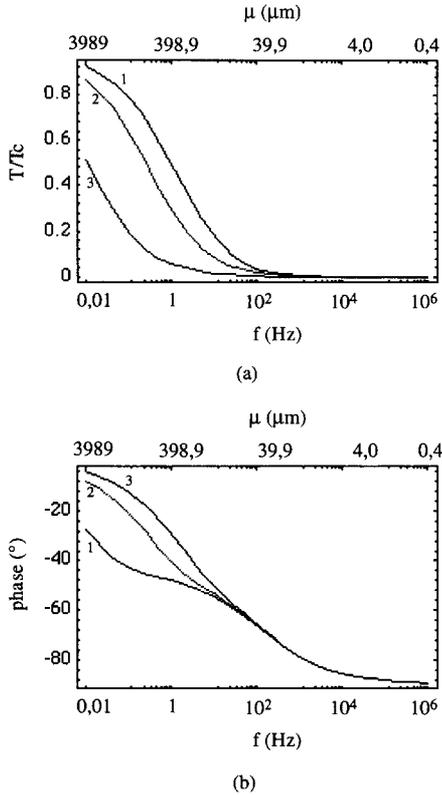
Pour une excitation à l'échelle micrométrique, le régime sphérique est donc observable systématiquement. Ce régime se caractérise par une amplitude au centre qui ne décroît pas avec la fréquence et une phase nulle au centre de l'excitation.

### 6.3. Transition régime plan - régime adiabatique

Pour ce paragraphe, l'échantillon employé est un matériau diélectrique type ayant pour caractéristiques :

$\beta = 2 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ ,  $k = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $C_p = 1000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , d'où une diffusivité thermique de  $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

La figure 3 représente la réponse thermique de cet échantillon au centre de l'excitation ( $r = 0$ ;  $z = 0$ ) en fonction de la fréquence de modulation pour trois valeurs de rayons d'excitation : 500  $\mu\text{m}$ , 1 mm et 5 mm.



**Figure 3.** Température au centre ( $r = 0$ ;  $z = 0$ ), diélectrique. 1 :  $r_0 = 1 \mu\text{m}$ ; 2 :  $r_0 = 10 \mu\text{m}$ ; 3 :  $r_0 = 50 \mu\text{m}$ .

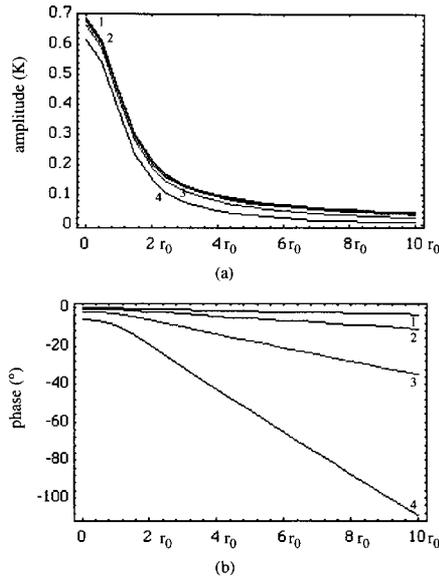
**Figure 3.** Temperature at the centre ( $r = 0$ ;  $z = 0$ ), dielectric. 1:  $r_0 = 1 \mu\text{m}$ ; 2:  $r_0 = 10 \mu\text{m}$ ; 3:  $r_0 = 50 \mu\text{m}$ .

La courbe de phase (courbe 1) permet l'observation de la transition du régime plan au régime adiabatique, caractérisé par une phase en tout point égale à  $-90^\circ$ . Le régime adiabatique correspond au cas où la longueur de diffusion thermique est très inférieure aux dimensions de la source.

L'absence de palier de phase à  $-45^\circ$  sur les deux autres courbes (2 et 3) s'explique par la valeur du rayon d'excitation qui, comparée à la longueur de diffusion thermique, ne peut plus satisfaire les critères d'établissement du régime plan. Pour une fréquence supérieure à 100 Hz environ, la réponse thermique est la même pour les trois valeurs de rayons retenues ici et tend vers le régime adiabatique. En effet, pour des fréquences supérieures à 100 Hz, la longueur de diffusion thermique devient inférieure aux dimensions de la source de chaleur ( $1/\beta = 50 \mu\text{m}$ ).

## 6.4. Profils radiaux de température

La figure 4 présente l'amplitude et la phase de la composante alternative de la température en surface, avec  $r_0 = 1 \mu\text{m}$  et  $\eta P = 1 \text{ mW}$ . Sur le graphe relatif à l'amplitude figure également la composante continue. Les courbes d'amplitude correspondant aux fréquences de 1 et 10 kHz sont confondues avec celle de la composante continue.



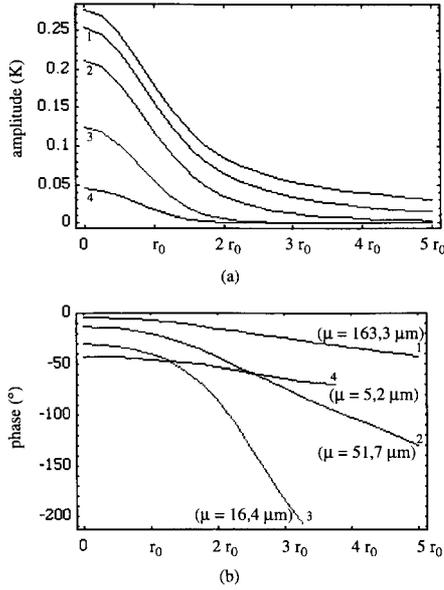
**Figure 4.** Profils radiaux surfaciques ( $r_0 = 1 \mu\text{m}$ ). 1 :  $f = 1 \text{ kHz}$ ; 2 :  $f = 10 \text{ kHz}$ ; 3 :  $f = 100 \text{ kHz}$ ; 4 :  $f = 1 \text{ MHz}$ .

**Figure 4.**  $r$ -profiles at the surface ( $r_0 = 1 \mu\text{m}$ ) 1:  $f = 1 \text{ kHz}$ ; 2:  $f = 10 \text{ kHz}$ ; 3:  $f = 100 \text{ kHz}$ ; 4:  $f = 1 \text{ MHz}$ .

La principale remarque concerne le caractère localisé de la réponse thermique. Pour les fréquences de modulation employées, la diffusion harmonique de la chaleur se fait en régime sphérique, c'est-à-dire que la longueur de diffusion thermique est grande devant le rayon d'excitation.

La réponse thermique se localise sur une longueur très inférieure à la longueur de diffusion thermique. Ceci est dû à l'expression de la température en régime sphérique, qui est inversement proportionnelle au rayon  $r$  (voir relation (33)), indépendamment de la fréquence de modulation, donc de la longueur de diffusion thermique. La localisation par la fonction exponentielle devient négligeable aux courtes distances devant la localisation par le facteur  $1/r$ . Une source de petites dimensions voit ainsi son effet confiné à son proche voisinage, même à basses fréquences ou pour la composante continue de la température.

La figure 5 est analogue à la figure 4, mais pour  $r_0 = 25 \mu\text{m}$  et  $\eta P = 10 \text{ mW}$ .



**Figure 5.** Profils radiaux surfaciques ( $r_0 = 25 \mu\text{m}$ ). 1 :  $f = 1 \text{ kHz}$ ; 2 :  $f = 10 \text{ kHz}$ ; 3 :  $f = 100 \text{ kHz}$ ; 4 :  $f = 1 \text{ MHz}$ .  
**Figure 5.**  $r$ -profiles at the surface ( $r_0 = 25 \mu\text{m}$ ). 1:  $f = 1 \text{ kHz}$ ; 2:  $f = 10 \text{ kHz}$ ; 3:  $f = 100 \text{ kHz}$ ; 4:  $f = 1 \text{ MHz}$ .

Cette figure 5 permet d'observer le passage du régime sphérique au régime plan. En effet, pour  $f = 1 \text{ MHz}$ , le transfert de chaleur suit le régime plan. Pour cette fréquence de modulation, la longueur de diffusion thermique est égale à un cinquième du rayon d'excitation.

En régime sphérique, la pente radiale des courbes de phase permet une identification de la diffusivité thermique de manière aisée [7, 8]. En effet, la phase de la composante alternative de la température est alors inversement proportionnelle à la longueur de diffusion thermique (voir relation (33)).

### 6.5. Sensibilité à la diffusivité thermique

Par définition [9], le coefficient de sensibilité d'une grandeur quelconque  $G$  au paramètre  $m_i$  peut s'écrire sous la forme suivante :

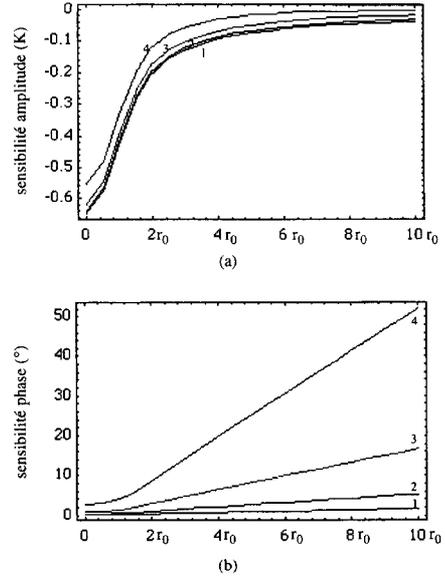
$$X_i = m_i \frac{\partial G}{\partial m_i} \quad (44)$$

Dans notre cas (méthode mixte de résolution), nous calculons numériquement la transformée de Hankel inverse de la température, ce qui contraint à calculer également numériquement la dérivée.

La sensibilité en amplitude et en phase de la température à la diffusivité thermique est calculée selon :

$$X_a = a \frac{T(a + \Delta a) - T(a)}{\Delta a} \quad (45)$$

La figure 6 présente l'évolution de cette sensibilité pour une variation relative de +5 % de la diffusivité thermique, soit  $8,83 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , en fonction de la coordonnée radiale. Le rayon d'excitation est de  $1 \mu\text{m}$  et la puissance absorbée est de  $1 \text{ mW}$ . La variation de diffusivité est ici simulée par une variation de conductivité thermique à chaleur volumique constante.



**Figure 6.** Évolution de la sensibilité selon  $r$  ( $r_0 = 1 \mu\text{m}$ ). 1 :  $f = 1 \text{ kHz}$ ; 2 :  $f = 10 \text{ kHz}$ ; 3 :  $f = 100 \text{ kHz}$ ; 4 :  $f = 1 \text{ MHz}$ .  
**Figure 6.** Evolution of the sensibility versus  $r$  dimension ( $r_0 = 1 \mu\text{m}$ ). 1:  $f = 1 \text{ kHz}$ ; 2:  $f = 10 \text{ kHz}$ ; 3:  $f = 100 \text{ kHz}$ ; 4:  $f = 1 \text{ MHz}$ .

Quant la détection s'éloigne du centre, la sensibilité en amplitude diminue. Il serait donc recommandé, pour effectuer une identification de la diffusivité thermique à partir de l'amplitude de la composante alternative de la température, de travailler près de l'excitation.

En revanche, à partir de la phase, il y a tout intérêt à s'éloigner de l'excitation pour bénéficier d'une bonne sensibilité. C'est d'ailleurs principalement à partir des profils en phase obtenus par diverses méthodes photothermiques que des identifications de diffusivité thermique sont réalisées à l'échelle micrométrique [7, 8, 10].

## 7. RÉGIMES THERMIQUES OBSERVÉS SOUS EXCITATION MICROMÉTRIQUE

Parmi les principales méthodes photothermiques [11], nous examinons ici la radiométrie photothermique [12], l'effet mirage [13] et la photoréflexion [14].

Avec un dispositif de radiométrie photothermique, Salazar et al. [15] étudient deux matériaux anisotropes (graphite pyrolytique et nitrure de bore pyrolytique). Le faisceau exciteur est un laser à argon ionisé de diamètre égal à  $80 \mu\text{m}$ . Le détecteur infrarouge HgCdTe permet l'observation d'une zone de  $70 \times 70 \mu\text{m}^2$ . Les fréquences de modulation sont comprises entre 10 et 80 Hz. Dans ces conditions, le transfert thermique suit le régime sphérique. Également en radiométrie photothermique, Martinsons et al. [16] réalisent des mesures de diffusivité thermique, d'effusivité thermique et de résistance thermique de contact sur des dépôts de TiN de quelques micromètres d'épaisseur (3 à  $5 \mu\text{m}$ ) sur un substrat d'acier. Le faisceau laser exciteur, d'une puissance de 2 W, a un diamètre de  $100 \mu\text{m}$ ; la zone détectée a un diamètre de  $60 \mu\text{m}$ . Les fréquences de modulation utilisées vont de 10 à 400 kHz. Avec de telles conditions expérimentales, le transfert de chaleur est intermédiaire entre les régimes sphérique et plan.

En utilisant l'effet mirage, Figari [17] a réalisé une mesure de la diffusivité thermique d'un échantillon de cuivre à l'aide d'un faisceau laser sonde (laser He-Ne). Le faisceau pompe, de diamètre égal à  $100 \mu\text{m}$ , est produit par une lampe au xénon modulée à des fréquences allant de 4 à 400 Hz. Ces conditions expérimentales conduisent à un régime sphérique de transfert de chaleur. C'est également le cas, toujours par effet mirage, pour Machlab et al. [18], puisque la fréquence de modulation est inférieure à 2 kHz pour un faisceau exciteur ayant un rayon de  $35 \mu\text{m}$ .

Par photoréflexion, Forget et al. [8] étudient la mobilité des porteurs dans le silicium. Le faisceau sonde est issu d'une diode laser émettant à 670 nm et le faisceau pompe d'un laser argon ionisé modulé entre 500 kHz et 2 MHz par une cellule acousto-optique. La valeur de la mobilité des porteurs est obtenue à partir des profils de phase, en régime sphérique, du signal de photoréflexion. Avec la même technique expérimentale, Hartmann et al. [19] étudient la conductivité thermique de films minces d'or (épaisseur allant de 50 à 1 500 nm) sur un substrat de quartz. Avec les conditions expérimentales employées, la diffusion de la chaleur se fait encore en régime sphérique.

Les méthodes photothermiques se développent très rapidement en direction d'une analyse à l'échelle microscopique. Avec les conditions expérimentales requises pour une analyse à cette échelle, la diffusion de la chaleur se fait principalement en régime sphérique. Ceci contribue à la résolution spatiale de ces méthodes, puisque la perturbation thermique est atténuée en  $1/r$  dès que l'on sort du faisceau exciteur, indépendamment de l'atténuation par la fonction exponentielle, faisant intervenir la longueur de diffusion thermique. Puisque le transfert de chaleur suit le régime sphérique, la résolution spatiale peut devenir inférieure à la longueur de diffusion thermique. Cette particularité est qualifiée de «super-résolution» par Cretin et al. [20].

## 8. CONCLUSIONS

Le comportement thermique d'un milieu semi-infini, soumis à une excitation optique de type laser et modulée sinusoïdalement, est simulé à partir de plusieurs modélisations thermocinétiques, faisant usage des transformées intégrales et des fonctions de Green, ainsi que des réponses harmoniques associées.

Ces méthodes de résolution apportent un formalisme pertinent pour la compréhension du phénomène de diffusion de la chaleur, en vue de l'application de techniques inverses. Le formalisme introduit par les fonctions de Green et les réponses harmoniques met en évidence les différents régimes de transfert de chaleur, tout en leur donnant une base plus fondamentale.

Avec une excitation de dimensions micrométriques, la diffusion de la chaleur se fait principalement en régime sphérique, c'est-à-dire que la perturbation thermique reste localisée sur une longueur inférieure à la longueur de diffusion thermique. Dans le cadre de l'orientation actuelle des méthodes photothermiques vers une analyse à l'échelle microscopique, le régime sphérique décrit bien la diffusion harmonique de la chaleur pour des expériences à une telle échelle d'analyse, où il contribue alors à la résolution spatiale.

Par ailleurs, un rappel a été effectué concernant la distinction qu'il conviendrait de maintenir, dans la terminologie, entre phénomènes ondulatoires et phénomènes de diffusion en régime harmonique.

## RÉFÉRENCES

- [1] Mathieu J.-P., Kastler A., Fleury P., Dictionnaire de Physique, Masson-Eyrolles, 1985.
- [2] Ozisik M.N., Heat Conduction, John Wiley, New York, 1993.
- [3] Gillet Y., Analyse thermoélastique appliquée à la microscopie électroacoustique, Thèse, université de Reims-Champagne-Ardenne, 1997.
- [4] Butkovskiy A.G., Green's functions and transfer functions handbook, Wiley, New York, 1982.
- [5] Bissieux C., Gillet Y., Modélisation photothermique à l'échelle micrométrique, Journée d'étude SFT/GUT : Métrologie thermique à l'échelle du micromètre, Paris, 23 mars 1994.
- [6] Martinet J., Thermocinétique approfondie, Tec & Doc Lavoisier, Paris, 1989.
- [7] Lepoutre F., Lefebvre J., Lhermitte T., Ainouch L., Delpech P., Forge P., Hirschi S., Joulaud J.-L., Mesures thermiques microscopiques, Rev. Gén. Therm. 35 (1996) 344-354.
- [8] Forget B.C., Barbereau I., Fournier D., Tuli S., Bat-tacharyya A.B., Electronic diffusivity measurement in silicon by photothermal microscopy, Appl. Phys. Lett. 69 (8) (1996) 1107-1109.
- [9] Beck J.V., Arnold K.J., Parameter estimation in engineering and science, John Wiley & Sons, New York, 1977.

[10] Pottier L., Micrometer scale visualization of thermal waves by photorefectance microscopy, *Appl. Phys. Lett.* 64 (13) (1994) 1–2.

[11] Balageas D., Le contrôle non destructif par méthodes thermiques, *Rev. Gén. Therm.* (356–357) (1991) 483–498.

[12] Nordal P.E., Kanstad S.O., Photothermal radiometry, *Physica Scripta* 20 (1979) 659–662.

[13] Boccara A.C., Fournier D., Badoz J., Thermo-optical spectroscopy: detection by 'mirage effect', *Appl. Phys. Lett.* 36 (6) (1980) 130–132.

[14] Rosencwaig A., Opsal J., Smith W.L., Willenborg D.L., Detection of thermal waves through optical reflectance, *Appl. Phys. Lett.* 46 (11) (1985) 1013–1015.

[15] Salazar A., Sanchez-Lavega A., Ocariz A., Guitonny J., Pandey G.C., Fournier D., Boccara A.C., Thermal diffusivity of anisotropic materials by photothermal methods, *J. Appl. Phys.* 79 (8) (1996) 3984–3993.

[16] Martinsons C., Picol V., Imbach F., Heuret M., Photothermal analysis of PVD TiN coatings, in: 5th International Symposium on Trends and New Applications in Thin Films, *Le Vide : Science, Technique et Applications* (special issue) 279 (1996) 176–178.

[17] Figari A., Photothermal measurement of thermal diffusivity with an incoherent pump beam, *Meas. Sci. Technol.* 2 (7) (1991) 653–656.

[18] Machlab H., McGahan W.A., Woolam J.A., Thermal diffusivity measurements by photothermal laser beam deflection (PTD): data analysing using the Levenberg-Marquardt algorithm, *Thin Solid Films* 215 (1992) 130–137.

[19] Hartmann J., Voigt P., Reichling M., Measuring local thermal conductivity in polycrystalline diamond with a high resolution photothermal microscope, *J. Appl. Phys.* 81 (7) (1997) 2966–2972.

[20] Cretin B., Franquet O., *Prog. Nat. Sci. (suppl.)* 6 (1996) 111.

### Abridged English Version

#### Harmonic heat diffusion applied to non-destructive evaluation by photothermal techniques

The different photothermal techniques for non-destructive testing and characterization are in quick expansion, notably towards microscopic analysis, for which these techniques can be introduced inside microscopes: optical, electron, tunnel, atomic force... Whatever the detection technique, the sample temperature under periodic excitation has to be calculated, in order to interpret the images, then to undertake the estimation of thermophysical parameters from the photothermal or thermoelastic signals.

In a similar way to the Green's functions in time-dependent problems, the harmonic response functions are more especially well suited to calculate the temperature fields induced by harmonic sources of any spatial distribution. The harmonic response is the solution of the heat diffusion equation with harmonic time dependence, where the heat source is expressed as Dirac's delta functions for the spatial coordinates. Generally, the harmonic response function is related to the corresponding Green's function by a Fourier transform. With no boundary conditions of the first kind, the solution of the heat diffusion is simply obtained from an integration of the harmonic response over the source field.

In the axisymmetrical case, the two-dimensional harmonic response function is the response to a circular heat generating thread. A smart alternative in this case is the use of a mixed method, associating an integral transform and a harmonic response. At first, a Hankel transform is applied to the heat equation, leading to a

one-dimensional equation for the axial variable. Then a harmonic plane response function can rather easily be found, according to the boundary conditions of the problem, even for a multi-layer sample. In the frequent case of a localized source at relatively high modulation frequencies, a semi-infinite sample with zero flux on the surface is well suited for the boundary conditions.

From a relevant analysis of the results given by this modelling, we identify a few characteristic heat diffusion behaviours, according to the ratio between the thermal diffusion length and the dimensions of the beam or of the sample. These temperature distributions behaviours correspond to isothermal, spherical, plane, cylindrical or adiabatic conditions. With a view to parameter identification, these particular behaviours provide model reduction opportunities. Particular attention is devoted to the thermal patterns observed under excitations with micrometric dimensions, where the heat diffusion happens in an almost spherical geometry. Then, even at low modulation frequencies, the spatial resolution of the photothermal technique appears to be essentially limited by the size of the heating beam.

Finally, we believe that a specific terminology must be held between genuine wave propagation and diffusion phenomena under harmonic excitation. Concerning the latter, we clearly prefer the term of 'harmonic diffusion' rather than the commonly used expression of 'thermal wave'.